Métodos Numéricos

2do Cuatrimestre 2024

2do Parcial (08/11/2024)

DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

Nombre y Apellido: [redacted]

Libreta Universitaria: [redacted]

Total de hojas entregadas (sin enunciado):

1) 1 2) 3 3) 1 4) 2

Puntajes por resolución de ejercicios y condiciones generales de corrección				
Ej. 1 21	Ej. 2 27	Ej. 3 26	Ej. 4 26	Final 100
El examen se aprueba con 60 puntos. Resolver los ejercicios en hojas separadas. Incluir LU y nombre en hojas y enunciado.		**Justificar <u>todas</u> las respuestas** Puede hacerlo citando resultados de la teórica o la práctica. Para ejercicios de la guía, consulte.		

Ejercicio 1 (21 puntos). Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz de autovalores $\{1; 1; -2\}$. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando una prueba para las verdaderas y un contraejemplo no bidiagonal para las falsas:

a) (7 puntos) A es inversible;

b) (7 puntos) A es diagonalizable;

c) (7 puntos) A no es diagonalizable.

Ejercicio 2 (27 puntos). Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rango r, $A = U\Sigma V^t$ una descomposición SVD de A y P el proyector ortogonal sobre $Im(A)$, es decir, que cumple que $Px = x$ si $x \in Im(A)$ y $Px = 0$ si $x \in Im(A)^{\perp}$. Dada una matriz X, notaremos x_i a la $i-$ésima columna de X.

a) (7 puntos) ¿Qué condiciones debe cumplir A para que P pueda definirse como $\widetilde{P} = A(A^tA)^{-1}A^t$? Suponiendo esas condiciones, dar una descomposición SVD de $\widetilde{P}$, indicando sus valores singulares.

b) (10 puntos) Mostrar que $\{u_1, ..., u_r\}$ forman una base de $Im(A)$ y que $\{u_{r+1}, ..., u_m\}$ forman una base de $Im(A)^{\perp}$. *Sugerencia: Recordar que si $A \oplus B = R^m$, entonces $dim(A) + dim(B) = m$.*

c) (10 puntos) Probar que el proyector ortogonal sobre $Im(A)$ es $P = \sum_{i=1}^{r} u_i u_i^t$.

Ejercicio 3 (26 puntos). Se busca aproximar mediante cuadrados mínimos los datos de la tabla:

t	y
-2	1
-1	2
1	4
2	-1

a) (10 puntos) Probar que los valores $x_1 = -1$ y $x_2 = 4$ son los que mejor ajustan la función cuadrática $f(t) = x_1t^2 + x_2$ a los datos usando ecuaciones normales.

b) (10 puntos) Probar que los valores $x_1 = 4$ y $x_2 = -1$ son los que mejor ajustan la función racional $g(t) = x_1/t^2 + x_2$ a los datos usando ecuaciones normales.

c) (6 puntos) Calcular el error cometido al usar estas funciones y comparar los resultados.

Ejercicio 4 (26 puntos). El método iterativo de Richardson para sistemas lineales $Ax = b$ se corresponde con el esquema $x^{(k)} = (I - A)x^{(k-1)} + b$.

a) (8 puntos) Probar que si A es singular, el método no converge para cualquier valor inicial x_0.

b) (10 puntos) Probar que si la matriz A es estrictamente diagonal dominante por filas y los elementos de su diagonal son iguales a 1, entonces el método de Richardson converge para cualquier x_0.

c) (8 puntos) Dada una matriz A inversible y estrictamente diagonal dominante por filas, proponer una modificación para que el método converja para cualquier valor inicial x_0.
Sugerencia: modificar el sistema para aplicar el item (b).

Ej 1 [redacted] 21.

$A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con autovalores $\{1;1;-2\}$

a) A es inversible? <u>Verdadero</u>

Supongamos que A no es inversible. A no inversible $\iff \det(A)=0$.

Si $\det(A)=0$ entonces $\lambda=0$ es autovalor porque:

$\det(A-\lambda I)\big|_{\lambda=0} = \det(A-0\cdot I) = \det(A) = 0 \Rightarrow \lambda=0$ es raíz del polinomio característico

Absurdo pues los únicos autovalores de A son $\{1;1;-2\}$.

$\therefore$ A sí es inversible

b) A es diagonalizable? <u>Falso</u>

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ triangular superior

Por ser t.s. los autovalores de A son los elementos de la diagonal: $\{1;1;-2\}$. A es diagonalizable sii sus autovectores forman una base de $\mathbb{R}^3$. Veamos si eso sucede.

Buscamos S_1 el autoespacio asociado a $\lambda=1$.

$$Ax = 1\cdot x \iff \begin{cases} x_1+x_2+x_3 = x_1 & \Rightarrow x_2 = 0 \\ x_2 = x_2 \\ -2x_3 = x_3 & \Rightarrow x_3=0 \end{cases} \iff x=(x_1,0,0)$$

$\therefore S_1 = \langle e_1 \rangle$

La $m_A(1) = 2 \neq 1 = \dim(S_1) = m_G(1)$. Como no coinciden las multiplicidades algebraica y geométrica para el autovalor $\lambda=1$ ya podemos concluir que los autovectores no forman una base (los autovectores generan un subespacio de dim=2)

$\therefore$ A no es diagonalizable

c) A no es diagonalizable? Falso ✓

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ triangular superior.

Usamos la misma estrategia que en el inciso b). 4

Buscamos S_1. ✓

$$Ax = x \iff \begin{cases} x_1 + x_3 = x_1 & \Rightarrow x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ -2x_3 = x_3 & \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases} \iff x = (x_1, x_2, 0)$$

✓

Definimos $S_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$ que tiene $\dim(S_1) = 2$. ✓

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ m_A(1) &= m_G(1) = 2 \\ m_A(-2) &= \underbrace{m_G(-2) = 1}_{} \end{aligned}\right\} \dim(S_1) + \dim(S_{-2}) = 3$$

esto es porque $mg(\lambda) \geq 1$ siempre.

Resultado de la práctica: para 2 autovalores distintos (1 y -2) sus autovectores asociados son LI. Entonces $S_1 \oplus S_{-2} = \mathbb{R}^3$ y por lo tanto los autovectores de A forman una base de $\mathbb{R}^3$.

$\therefore$ A sí es diagonalizable.

¡Impecable! Muy prolijo y bien explicado.

NOTA

Ej 2 [redacted]

$A = U\Sigma V^T$ $\quad rg(A) = r \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

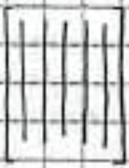
P proyector ortogonal sobre $Im(A)$

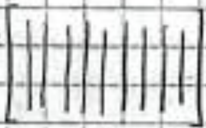
$Px = x \quad$ si $x \in Im(A)$

$Px = 0 \quad$ si $x \in Im(A)^{\perp} = Nu(A^T)$

a)

Veamos que pasa con el $rg(A^TA)$ en función del $rg(A)$.

$m \geq n \quad A =$  $rg(A)$ máximo es n pues las cols(A) están en $\mathbb{R}^m$ y $m \geq n$.

$m \leq n \quad A =$  $rg(A)$ máximo es n pues las cols(A) están en $\mathbb{R}^m$ y $m \leq n$. Hay igual o más columnas que la dimensión del espacio donde viven.

En la práctica vimos que $rg(A^TA) = rg(A)$

$A^TA \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es cuadrada y resultará inversible sii $rg(A^TA) = rg(A) = n$.

$\therefore$ Necesitamos que $rg(A) = n$ para poder definir $\tilde{P}$.

Buscamos la descomposición SVD de $\tilde{P} = A(A^TA)^{-1}A^T$ a partir de la de $A = U\Sigma V^T$ considerando que $\sigma_i > 0 \ \forall i = 1\ldots n$ porque $rg(A) = n$ y que existe $(A^TA)^{-1}$

$$\begin{aligned}
\tilde{P} &= U\Sigma V^T[(U\Sigma V^T)^T U\Sigma V^T]^{-1}(U\Sigma V^T)^T \\
&= U\Sigma V^T[V\Sigma^T \underbrace{U^T U}_{I}\Sigma V^T]^{-1} V\Sigma^T U^T \\
&= U\Sigma V^T[V\Sigma^T\Sigma V^T]^{-1} V\Sigma^T U^T \\
&= U\Sigma V^T(V^T)^{-1}(\Sigma^T\Sigma)^{-1}V^{-1}V\Sigma^T U^T
\end{aligned}$$

V ortogonal: $V^{-1} = V^T \Rightarrow (V^T)^{-1} = V$

$$\begin{aligned}
&= U\Sigma V^T V(\Sigma^T\Sigma)^{-1}\Sigma^T U^T \\
&= U\Sigma(\Sigma^T\Sigma)^{-1}\Sigma^T U^T
\end{aligned}$$

U y U^T son ortogonales porque vienen de la descomposición SVD de A. Basta ver que $\Sigma(\Sigma^T\Sigma)^{-1}\Sigma^T$ es una "diagonal".

Vemos el caso $m \leq n$. Si $n \geq m$ es análogo.

$$\Sigma^T\Sigma = \overset{n\times m}{\begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_n & \end{bmatrix}} \cdot \overset{m\times n}{\begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \\ & 0 & \end{bmatrix}} = \overset{n\times n}{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}}$$

$$(\Sigma^T\Sigma)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_n^2 \end{bmatrix}$$ existe pues $\sigma_i > 0 \ \forall i = 1\ldots n$ porque $rg(A) = n$

$$\Sigma(\Sigma^T\Sigma)^{-1}\Sigma^T = \overset{m\times n}{\begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \\ & 0 & \end{bmatrix}} \cdot \overset{n\times n}{\begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_n^2 \end{bmatrix}} \cdot \overset{n\times m}{\begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_n & \end{bmatrix}}$$

Ej 2 [redacted]

$$\Sigma(\Sigma^T\Sigma)^{-1}\Sigma^T = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \hline & 0 & \end{bmatrix} = \Sigma_P$$

$\therefore$ La descomposición SVD de $\tilde{P}$ es:

$$\tilde{P} = U \underbrace{\Sigma(\Sigma^T\Sigma)^{-1}\Sigma^T}_{\Sigma_P} U^T = U\Sigma_P U^T$$

$\therefore$ Sus valores singulares son $\sigma_i = 1 \ \forall i = 1 \ldots n$.

b)

QVQ: $Im(A) \subseteq \langle u_1 \cdots u_r \rangle$

Sea $y \in Im(A)$. $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tq $Ax = y$

$\{v_1 \cdots v_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Escribimos a x como una combinación lineal de $v_1 \cdots v_n$

$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$

$Ax = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{Av_i}$

$Av_i = U\Sigma V^T v_i = U\Sigma e_i = \sigma_i U e_i = \sigma_i u_i \quad \forall i = 1 \ldots n$

$Ax = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_i u_i$

$\sigma_i = 0 \quad \forall i = r+1 \ldots n$

Se anulan todos los términos para $i = r+1 \ldots n$

$Ax = \sum_{i=1}^r \alpha_i \sigma_i u_i = y \quad \Rightarrow \quad y \in \langle u_1 \cdots u_r \rangle \quad \forall y \in Im(A)$

$\therefore Im(A) \subseteq \langle u_1 \cdots u_r \rangle$ pues cualquier $y \in Im(A)$ se escribe como combinación lineal de $u_1 \cdots u_r$

QVQ: $Im(A) = \langle u_1 \cdots u_r \rangle$

$rg(A) = r \Rightarrow dim(Im(A)) = r$

$dim(\langle u_1 \cdots u_r \rangle) = r$ (son r vectores ortonormales)

Si dos subespacios S y T son tales que $S \subseteq T$ y $dim(S) = dim(T)$ entonces $S = T$.

Por lo tanto, como $Im(A) \subseteq \langle u_1 \cdots u_r \rangle$

y además $dim(Im(A)) = dim(\langle u_1 \cdots u_r \rangle) = r$

entonces $Im(A) = \langle u_1 \cdots u_r \rangle$

$\therefore \{u_1 \cdots u_r\}$ es una base de $Im(A)$ porque es un conjunto ortonormal.

QVQ: $\{u_{r+1} \cdots u_m\}$ es una base de $Im(A)^{\perp}$

$\{u_1 \cdots u_m\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$.

Ya vimos que $\{u_1 \cdots u_r\}$ es una base de $Im(A)$.

Notemos que $\langle u_1 \cdots u_r \rangle \oplus \langle u_{r+1} \cdots u_m \rangle = \mathbb{R}^m$

y además $\langle u_1 \cdots u_r \rangle^{\perp} = \langle u_{r+1} \cdots u_m \rangle$ porque cualquier base ortonormal podemos seperarla en 2 subespacios que están en suma directa y son ortogonales.

$\therefore \langle u_1 \cdots u_r \rangle^{\perp} = Im(A)^{\perp} = \langle u_{r+1} \cdots u_m \rangle$

NOTA

Ej 2 [redacted] B |B| B

c)

QVQ: $P = \sum_{i=1}^{r} u_i u_i^T$ con P proyector ortogonal sobre Im(A).

Por ejercicio 1b) de la práctica 1.

$$P = \sum_{i=1}^{r} u_i u_i^T = \overset{n \times m}{\left[\begin{array}{ccc|ccc} | & & | & | & & | \\ u_1 & \cdots & u_r & 0 & \cdots & 0 \\ | & & | & | & & | \end{array}\right]} \cdot \overset{m \times m}{\begin{bmatrix} - u_1 - \\ \vdots \\ - u_r - \\ - 0 - \\ \vdots \\ - 0 - \end{bmatrix}}$$

(las últimas $m-r$ columnas son ceros)

No lo usé al final pero ya lo escribí ✓

QVQ: $Py = y \quad \forall y \in Im(A)$

Por inciso b) $\{u_1 \cdots u_r\}$ es una base de Im(A)

$y = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i \quad \forall y \in Im(A)$.

$$\begin{aligned} Py &= \left(\sum_{j=1}^{r} u_j u_j^T\right) \cdot \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i \\ &= \sum_{j=1}^{r} u_j u_j^T \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i \\ &= \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{r} u_j u_j^T \alpha_i u_i \\ &= \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_j \underbrace{u_j^T u_i} \end{aligned}$$

$\{u_1 \cdots u_r\}$ ortonormales $\Rightarrow u_j^T u_i = 0 \ \forall j \neq i$

$$= \sum_{j=1}^{r} \alpha_i u_j \underbrace{u_j^T u_j}$$

$u_j^T u_j = \|u_j\|_2^2 = 1$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{r} \alpha_i u_j \\ &= y \end{aligned}$$

✓

$\therefore Py = y \quad \forall y \in Im(A)$

Papel de fibra de caña de azúcar.

QVQ: $Px = 0 \quad \forall x \in Im(A)^{\perp}$

Por inciso b) $\{u_{r+1} \dots u_m\}$ base de $Im(A)^{\perp}$

$x = \sum_{i=r+1}^{m} \alpha_i u_i \quad \forall x \in Im(A)^{\perp}$

$$Px = \left(\sum_{j=1}^{r} u_j u_j^T\right) \cdot \sum_{i=r+1}^{m} \alpha_i u_i$$

$$= \sum_{j=1}^{r} u_j u_j^T \sum_{i=r+1}^{m} \alpha_i u_i$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=r+1}^{m} \alpha_i u_j \underbrace{u_j^T u_i}_{=0}$$

$$\left.\begin{matrix} j = 1 \dots r \\ i = r+1 \dots m \end{matrix}\right\} u_j^T u_i = 0 \quad \forall j = 1 \dots r \quad \forall i = r+1 \dots m$$

$$= 0$$

$\therefore Px = 0 \quad \forall x \in Im(A)^{\perp}$

NOTA

Ej 3

[redacted]

a)

Construimos la matriz de cuadrados mínimos $A \in \mathbb{R}^{4\times2}$ para encontrar los coeficientes de F.

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $A^TA = \begin{bmatrix} 34 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$

$y = [1\ 2\ 4\ -1]^T$ $A^Ty = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$

Usando ecuaciones normales verificamos que $x = (-1, 4)$ son los mejores coeficientes para que la función: $F(t) = x_1 t^2 + x_2$ mejor aproxime los datos. Como las columnas de A son LI hay una única solución.

$A^TAx \stackrel{?}{=} A^Ty$

$A^TAx = \begin{bmatrix} 34 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = A^Ty$

b)

$g(t) = x_1/t^2 + x_2$

Mismo desarrollo que a).

$A = \begin{bmatrix} 1/4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1/4 & 1 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 1/4 & 1 & 1 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $A^TA = \begin{bmatrix} 17/8 & 5/2 \\ 5/2 & 4 \end{bmatrix}$ ✓

$A^TY = A^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$

$A^TAx \stackrel{?}{=} A^TY$ con $x = (4, -1)$

$A^TAx = \begin{bmatrix} 17/8 & 5/2 \\ 5/2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$ ✓

Porelle que te creo que hiciste las cuentas

c)

Ya vimos en a y b que las siguientes funciones mejor aproximan los datos. Vamos a calcular el error de cada una sumando el cuadrado de la diferencia en cada punto del dataset.

$F(t) = -t^2 + 4$ $\quad \varepsilon_F = \Sigma_{i=1}^{4} (F(t_i) - Y_i)^2 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

$g(t) = 4/t^2 - 1$ $\quad \varepsilon_g = \Sigma_{i=1}^{4} (g(t_i) - Y_i)^2 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

∴ Ambas funciones tienen el mismo error.

Necesitamos más datos para ver si hay una diferencia significativa entre F y g. ✓

o bien usar otro tipo de comparación (si te intriga, mirá los gráficos de cada función con los puntos)

Ej 4 [redacted]

$x^{(k)} = (I-A)x^{(k-1)} + b$

a)

QVQ: A singular $\Rightarrow$ no converge $\forall x_0$.

Sabemos que este esquema iterativo converge $\forall x_0$ sii el radio espectral de la matriz de iteración $I-A$ es < 1.

$\rho(I-A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } I-A\}$

Buscamos los autovalores de $I-A$.

En el ejercicio 1a) probamos que si A es singular entonces $\lambda=0$ es autovalor de A. Vamos a usar que $\lambda=0$ es autovalor de A y probar que 1 es autovalor de $I-A$.

Sea $v \neq 0$ autovector de A asociado a $\lambda=0$.

$(I-A)v = v - Av = v - 0 \cdot v = v = 1 \cdot v$

$\therefore$ $\lambda=1$ es autovalor de $I-A$.

Luego $\rho(I-A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } I-A\} \geq 1$.

$\therefore$ El método no converge $\forall x_0$ si A es singular.

B

b)

A edd: $|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \quad \forall i$

Sabemos que $a_{ii} = 1 \ \forall i \Rightarrow 1 > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \ \forall i$

En la matriz de iteración I-A tenemos todos 0 en la diagonal.

$I - A = \begin{bmatrix} 0 & -a_{ij} \\ -a_{ij} & 0 \end{bmatrix} \qquad (I-A)_{ii} = 0 \ \forall i$

Sabemos por la práctica que $\rho(I-A) \leq \|I-A\|$ para cualquier norma inducida. En particular miremos la norma ∞.

$$\|I-A\|_\infty = \max_i \|\text{Fila}_i(I-A)\|_1$$

$$= \max_i \sum_j |(I-A)_{ij}|$$

$$= \max_i \sum_{j \neq i} |(I-A)_{ij}| \qquad \text{pues } (I-A)_{ii} = 0$$

$$= \max_i \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < 1 \quad \text{pues A edd con } a_{ii} = 1 \ \forall i$$

$\therefore \ \rho(I-A) \leq \|I-A\|_\infty < 1 \Rightarrow \rho(I-A) < 1$

$\Rightarrow$ El sistema converge $\forall x_0$

B

NOTA

Ej 4 [redacted]

c)

Vamos a proponer otro método de iteración que cumple con las hipótesis de b), y entonces converge.

Si A es edd entonces no hay 0 en la diagonal, porque sino es imposible que se cumpla: $|a_{ii}| > \underbrace{\sum_j |a_{ij}|}_{\geq 0} \ \forall i$

Como no hay 0 en la diagonal de A, podemos definir la matriz J con las mismas dimensiones que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$J = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$ Notemos que: $(JA)_{ii} = a_{ii}/a_{ii} = 1 \ \forall i$

$(JA)_{ij} = a_{ij}/a_{ii} \ \forall i,j \Rightarrow |a_{ii}/a_{ii}| = 1 > \sum_j |a_{ij}/a_{ii}| \ \forall i \Rightarrow JA$ edd

porque A era edd

Si queremos resolver: $Ax = b \Leftrightarrow JAx = Jb$ pues A inversible, J inversible entonces hay una única solución.

El método J: $x^{(k)} = (I - JA)x^{(k-1)} + Jb$ converge por inciso b). Entonces $\exists x^*$ tq $x^{(k)} \to x^*$ cuando $k \to \infty$.

$$x^* = (I - JA)x^* + Jb$$
$$\Leftrightarrow x^* = x^* - JAx^* + Jb$$
$$\Leftrightarrow JAx^* = Jb$$
$$\Leftrightarrow J^{-1}JAx^* = J^{-1}Jb \qquad J \text{ inversible}$$
$$\Leftrightarrow Ax^* = b$$

↓

Como J y A inversibles obtenemos la (única) solución del sistema original $Ax = b$.

B